

## Задаци - седма недеља

задаци са \* су посебно важни

1. \* Нека је  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ограничена функција. Доказати

$$\lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} s(f; P) = \int_a^b f(x) dx, \quad \lim_{\lambda(P) \rightarrow 0} S(f; P) = \int_a^b f(x) dx.$$

2. \* Посматрајмо Дирихлеову функцију

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

На два начина (користећи Дарбуов и Лебегов критеријум) доказати да  $\chi_{\mathbb{Q}}$  није Риман интеграбилна на  $[0, 1]$ .

3. \* Нека је дата функција  $R : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дефинисана са

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{за } x = \frac{m}{n}, \text{ где су } m \text{ и } n \text{ узајамно прости, } m \neq 0, n > 0 \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Да ли је  $R$  Риман интеграбилна на интервалу  $[-1, 1]$ ?